O zastosowaniu teoryi funkcyj symetrycznych

do wyprowadzenia układu zupełnego

utworów niezmiennikowych dla form o dwóch zmiennych.

Napisał

F. MERTENS.

Rzecz przedstawiona 20 Kwietnia 1891 r.

Zamierzam w rozprawie niniejszej zastósować teoryją funkcyj symetrycznych do wyprowadzenia układów zupełnych utworów niezmiennikowych dla jednej formy o dwóch zmiennych. Przez układ zupełny utworów niezmiennikowych danej formy lub danego pocztu form rozumiem zbiór utworów niezmiennikowych takich, przez które każdy utwór niezmiennikowy całkowity rzeczonej formy lub rzeczonego pocztu form w sposób całkowity przedstawić można.

1.

Najprzód zajmę się zadaniem:

„Mając dany układ form linijowych dwóch zmiennych, wyznaczyć ogólny kształt utworów niezmiennikowych całkowitych tychże form.“

Niechaj będzie dany poczet form linijowych

$$\begin{aligned} a &= a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ b &= b_1 x_1 + b_2 x_2 \\ &\dots\dots\dots \\ e &= e_1 x_1 + e_2 x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

zmiennych x_1, x_2 i niechaj $\Theta(x_1, x_2)$ oznacza jakibądź utwór niezmiennikowy całkowity tychże form, zawierający tylko jeden poczet zmiennych x_1, x_2. Jeżeli we formach (1) uskutecznimy podstawienie

$$x_1 = \xi_1 X_1 + \eta_1 X_2 \qquad x_2 = \xi_2 X_1 + \eta_2 X_2$$

i położymy

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 = a_\xi \qquad a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 = a_\eta$$
$$b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 = b_\xi \qquad b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 = b_\eta$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots,$$

to przez utwór niezmiennikowy całkowity danego pocztu form rozumimy funkcyją całkowitą $\Theta(x_1, x_2)$ ilości

(2) $$a_1, a_2, b_1, b_2, \quad e_1, e_2,$$

(3) $$x_1, x_2,$$

z osobna jednorodną co do a_1, a_2, co do b_1, b_2, ... i co do x_1, x_2, która czyni zadość tożsamości kształtu

(4) $$\Theta_1(\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2, \xi_2 X_1 + \eta_2 X_2)(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)\rho = F,$$

gdzie ρ oznacza liczbę całkowitą nieujemną a F funkcyją całkowitą wyrażeń

(5) $$a_\xi, a_\eta, b_\xi, b_\eta, \ldots e_\xi, e_\eta$$

i zmiennych

(6) $$X_1, X_2,$$

której spółczynniki nie są zawisłymi ani od ilości (2) i (3) ani od spółczynników podstawienia

(7) $$\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2.$$

Spółczynniki danych form i spółczynniki podstawienia uważamy jako zmienne nieoznaczone, i tożsamość (4) musi mieć miejsce co do wszystkich zmiennych (2), (3), (6), (7).

Położywszy dla skrócenia

(8) $$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = (\xi\eta)$$

i wziąwszy w tożsamości (4) po obu stronach spółczynniki najwyższej potęgi zmiennej X_1, otrzymujemy identyczność

(9) $$(\xi\eta)^\rho\, \Theta(\xi_1, \xi_2) = \Gamma,$$

gdzie Γ oznacza funkcyją całkowitą wyrażeń (5) niezawierającą po za temi wyrażeniami ilości (2) i (7).

Należy teraz rozróżnić dwa przypadki: według tego czy $\rho = 0$, czy $\rho > 0$.

Jezeli $\rho = 0$, to funkcyja Γ zmiennych η_1, η_2 nie zawiera. Nie może więc także zawierać wyrażeń $a_\eta, b_\eta, \ldots e_\eta$ a przeto musi być funkcyją samych wyrażeń $a_\xi, b_\xi, \ldots e_\xi$; ponieważ zaś nadto Θ jest wyrażeniem jednorodnem co do spółczynników każdej z danych form, przeto Γ musi posiadać tę samą własność i wskutek tego mieć kształt następujący

$$\Gamma = H a_\xi^\alpha b_\xi^\beta \ldots e_\xi^\varepsilon.$$

Jest więc

$$\Theta(\xi_1, \xi_2) = H a_\xi^\alpha b_\xi^\beta \ldots e_\xi^\varepsilon.$$

W tej tożsamości wolno zastąpić zmienne ξ_1, ξ_2 przez jakiebądź inne x_1, x_2 a przeto mamy

$$\Theta(x_1, x_2) = H a^\alpha b^\beta \ldots e^\varepsilon.$$

Jeżeli $\rho > 0$, to wykonajmy po obu stronach tożsamości (9) działanie

$$\text{(10)} \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\eta_2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi_2\partial\eta_1}.$$

Znajdujemy najprzód łatwym rachunkiem, oznaczywszy przez μ rząd wyrażenia Θ co do zmiennych x_1, x_2:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\right)(\xi\eta)^\rho\, \Theta(\xi_1, \xi_2) = \rho(\rho + \mu + 1)(\xi\eta)^{\rho-1}\, \Theta(\xi_1, \xi_2).$$

Jeżeli teraz dany poczet form (1) składa się tylko z jednej formy a, to będzie

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\xi_1\partial\eta_2} = \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial a_\eta} \cdot \frac{\partial a_\xi}{\partial\xi_1} \cdot \frac{\partial a_\eta}{\partial\eta_2} = a_1 a_2 \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial a_\eta}$$

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\xi_2\partial\eta_1} = \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial a_\eta} \cdot \frac{\partial a_\xi}{\partial\xi_2} \cdot \frac{\partial a_\eta}{\partial\eta_1} = a_1 a_2 \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial a_\eta}$$

a stąd tożsamościowo:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\right)\Gamma = 0.$$

W tym przypadku więc

$$\rho(\rho + \mu + 1)(\xi\eta)^{\rho-1}\, \Theta(\xi_1\, \xi_2) = 0$$

czyli identycznie

$$\Theta = 0.$$

Jedna forma linijowa a posiada więc tylko utwory niezmiennikowe całkowite kształtu Ha^α, i układ zupełny utworów niezmiennikowych dla takiej formy składa się tylko z formy a samej.

Jeżeli zaś liczba form danego pocztu przynajmniej równa 2, to otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\xi_1\,\partial\eta_2} = & \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial a_\eta} a_1 a_2 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial b_\eta} a_1 b_2 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial c_\eta} a_1 c_2 + \ldots + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial e_\eta} a_1 e_2 \\ & + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial b_\xi \partial a_\eta} b_1 a_2 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial b_\xi \partial b_\eta} b_1 b_2 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial b_\xi \partial c_\eta} b_1 c_2 + \ldots + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial b_\xi \partial e_\eta} b_1 e_2 \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\; \\ & + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial e_\xi \partial a_\eta} e_1 a_2 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial e_\xi \partial b_\eta} e_1 b_2 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial e_\xi \partial c_\eta} e_1 c_2 + \ldots + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial e_\xi \partial c_\eta} e_1 e_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\xi_2\,\partial\eta_1} = & \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial a_\eta} a_1 a_2 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial b_\eta} a_2 b_1 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial c_\eta} a_2 c_1 + \ldots + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial e_\eta} a_2 e_1 \\ & + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial b_\xi \partial a_\eta} b_2 a_1 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial b_\xi \partial b_\eta} b_1 b_2 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial b_\xi \partial c_\eta} b_2 c_1 + \ldots + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial b_\xi \partial e_\eta} b_2 e_1 \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\; \\ & + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial e_\xi \partial a_\eta} e_2 a_1 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial e_\xi \partial b_\eta} e_2 b_1 + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial e_\xi \partial c_\eta} e_2 c_1 + \ldots + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial e_\xi \partial e_\eta} e_1 e_2\end{aligned}$$

a ztąd

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\right)\Gamma = & (a_1 b_2 - a_2 b_1)\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial b_\eta} - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\eta \partial b_\xi}\right) + (a_1 c_2 - a_2 c_1)\times \\ & \left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial c_\eta} - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\eta \partial c_\xi}\right) + \ldots + (a_1 e_2 - a_2 e_1)\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial e_\eta} - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\eta \partial e_\xi}\right) + \\ & + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial b_\xi \partial c_\eta} - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial b_\eta \partial c_\xi}\right) + \\ & + \;.\;.\;.\;.\;.\;\end{aligned}$$

Jeżeli więc użyjemy skrócenia (8) i wyrażenia

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial b_\eta} - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\eta \partial b_\xi}, \quad \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\xi \partial c_\eta} - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial a_\eta \partial c_\xi}, \quad \ldots$$

które znowu są funkcyjami podobnemi do Γ, tylko rzędu o jednostkę niższego i co do ilości ξ_1, ξ_2 i co do ilości η_1, η_2, oznaczymy osobnemi głoskami

$$\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \;.\;.\;.\;.$$

to będzie

$$\rho(\rho+\mu+1)(\xi\eta)^{\rho-2}\Theta(\xi_1, \xi_2) = (ab)\,\Gamma_{12} + (ac)\,\Gamma_{13} + \ldots$$

Widoeznem teraz jest, że po powtórnem wykonaniu działania (10) otrzymamy tożsamość kształtu

$$\rho\,(\rho-1)\,(\rho+\mu+1)\,(\rho+\mu)\,(\xi\eta)^{\rho-2}\,\Theta\,(\xi_1,\xi_2)=\Sigma\,P_2\,\Gamma',$$

gdzie przez P_k rozumiem ogólnie iloczyn k wyznaczników szeregu

$$(ab),(ac),\ldots(ae),(bc),\ldots(be),\ldots(de). \qquad (11)$$

a przez Γ' funkcyją podobną do funkcyi Γ ale niższego rzędu o dwie jednostki i co do ilości ξ_1, ξ_2 i co do ilości η_1, η_2.

Po ρ krotnem wykonaniu działania (10) otrzymamy więc tożsamość

$$\rho!\,(\rho+\mu+1)\,(\rho+\mu)\ldots(2+\mu)\,\Theta\,(\xi_1,\xi_2)=\Sigma\,P_\rho\,\Gamma_0, \qquad (12)$$

gdzie Γ_0 ogólnie oznacza funkcyją całkowitą wyrażeń (5), która co do ilości η_1, η_2 jest względem Γ rzędu niższego o ρ jednostek. Ponieważ zaś Γ co do tychże ilości, według tożsamości (9), może być tylko rzędu ρ, przeto wyrażenia Γ_0 już nie zawierają a_η, b_η, ... e_η i są funkcyjami samych wyrażeń

$$a_\xi,\ b_\xi,\ \ldots\ e_\xi.$$

Można więc położyć ogólnie

$$\Gamma_0=H a_\xi^\alpha\, b_\xi^\beta\ \ldots\ e_\xi^\varepsilon$$

i tożsamość (12) podzielona przez liczbę różną od zera $\rho!\,(\rho+\mu+1)\,(\rho+\mu)\ldots(2+\mu)$ przechodzi na

$$\Theta\,(\xi_1,\xi_2)=\Sigma\,H'\,P_\rho\,a_\xi^\alpha\,b_\xi^\beta\ \ldots\ e_\xi^\varepsilon.$$

Zastąpiwszy więc zmienne ξ_1, ξ_2 przez x_1, x_2, mamy

$$\Theta\,(x_1,x_2)=\Sigma\,H'\,P_\rho\,a^\alpha\,b^\beta\ \ldots\ e^\varepsilon.$$

Najogólniejszy zatem utwór całkowity niezmiennikowy danego pocztu form linijowych (1) jest funkcyją całkowitą wyznaczników (11) i form (1). Wyznaczniki te więc w połączeniu z formami danemi tworzą układ zupełny utworów niezmiennikowych dla danego pocztu form (1).[1])

W szczególności zaś dla dwóch form linijowych a, b układ zupełny składa się z utworów niezmiennikowych

$$(ab),\ a.$$

i każdy utwór niezmiennikowy całkowity form a, b ma kształt

$$C\,(ab)^\gamma\,a^\alpha\,b^\beta.$$

---

[1]) Por. *Clebsch* w czasopiśmie *Crelle'a*. Tom 59.

2.

Jeżeli n form linijowych

$$(13) \qquad \begin{aligned} p &= p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ q &= q_1 x_1 + q_2 x_2 \\ &\cdots\cdots \\ s &= s_1 x_1 + s_2 x_2 \end{aligned}$$

przez siebie rozmnożymy i po rozwinięciu iloczynu położymy

$$pq \ldots s = \omega_0 x_1^n + \omega_1 x_1^{n-1} x_2 + \omega_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + \omega_n x_2^n,$$

to wiadomo[1]), że każde równanie całkowite, jednorodne, pomiędzy funkcyjami elementarnemi symetrycznemi

$$(14) \qquad \begin{aligned} \omega_0 &= p_1 q_1 \ldots s_1 \\ \omega_1 &= p_2 q_1 \ldots s_1 + q_2 p_1 \ldots s_1 + \ldots + s_2 p_1 q_1 \ldots \\ \omega_2 &= p_2 q_2 r_1 \ldots s_1 + p_2 r_2 q_1 \ldots s_1 + \ldots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_n &= p_2 q_2 \ldots s_2, \end{aligned}$$

którego spółczynniki nie są zawisłymi od zmiennych

$$(15) \qquad p_1, p_2, q_1, q_2, \ldots s_1, s_2,$$

i które identycznem jest co do tychże zmiennych, musi być także identycznem co do samych funkcyj $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_n$ czyli musi być spełnionem, jeżeli zamiast $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_n$ podstawimy dowolne zmienne. Twierdzenie to pozwala sprowadzić wyznaczenie ogólnego kształtu wszystkich utworów niezmiennikowych całkowitych formy n-tego rzędu zmiennych x_1, x_2 do wyznaczenia tegoż kształtu dla pocztu n form linijowych (13).

Jeżeli bowiem w jakimbądź utworze niezmiennikowym całkowitym, Θ formy n-tego rzędu

$$f = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n$$

zastąpimy spółczynniki

$$a_0, a_1, \ldots a_n$$

tejże formy odpowiedniemi spółczynnikami

$$\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_n$$

---

[1]) Rozpr. Ak. Um. Ser. II. Tom I. str. 349.

iloczynu $pq \ldots s$, to, jak łatwo dostrzedz, Θ przechodzi na utwór niezmiennikowy całkowity Θ_0 form linijowych (13), który co do spółczynników każdej z tych form jest jednorodnym i co do par zmiennych

$$(p_1, p_2), (q_1, q_2), \quad \ldots \quad (s_1, s_2)$$

symetrycznym. Jeżeli więc ogólny kształt utworów niezmiennikowych całkowitych i symetrycznych form $p, q, \ldots s$ potrafimy przedstawić jako funkcyją całkowitą $F(\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_n)$ wyrażeń elementarnych symetrycznych (14), to wyrażenia te potrzeba tylko w funkcyi F zastąpić przez spółczynniki odpowiednie formy f, aby otrzymać Θ. Albowiem z tożsamości

$$\Theta_0 = F(\omega_0, \omega_1, \quad \ldots \quad \omega_n),$$

na mocy twierdzenia wspomnianego, wynika identyczność

$$\Theta = F(a_0, a_1, \quad \ldots \quad a_n).$$

3.

Najogólniejszy utwór niezmiennikowy całkowity form linijowych (13) według §. 1 składa się ze skończonej ilości wyrazów kształtu

$$H P_\rho \, p^{\lambda_{01}} q^{\lambda_{02}} \quad \ldots \quad s^{\lambda_{0n}}, \tag{16}$$

gdzie H oznacza spółczynnik niezawisły od zmiennych (15) i od zmiennych x_1, x_2; P_ρ zaś iloczyn ρ wyznaczników szeregu

$$(pq), (pr), \ldots (ps), (qr), \ldots (qs), \ldots (rs). \tag{17}$$

Jeżeli nadto utwór ten ma być symetrycznym względem spółczynników każdej z form (13), to przedewszystkiem musi być tego samego rzędu co do poszczególnych spółczynników tychże form. Oznaczywszy więc wykładniki, z jakiemi wyznaczniki (17) w P_ρ występują, względnie przez

$$\lambda_{12}, \lambda_{13}, \quad \ldots \quad \lambda_{n-1\,n}$$

zaś przez m rząd utworu co do p_1, p_2, mamy równania:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{01} + \ast + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \ldots + \lambda_{1n} = m \\
&\lambda_{02} + \lambda_{12} + \ast + \lambda_{23} + \ldots + \lambda_{2n} = m \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_{0n} + \lambda_{1n} + \lambda_{2n} + \lambda_{3n} + \ldots + \ast = m,
\end{aligned} \tag{18}$$

które kolejno wyrażają, że spółczynniki każdej z form $p, q, \quad \ldots \quad s$, w każdym z wyrazów kształtu (16) zachodzą w rzędzie m.

Jeżeli więc utwór Θ_0 przedstawimy jako sumę wyrazów kształtu (16), to każdemu takiemu wyrazowi odpowiada rozwiązanie równań (18) w liczbach całkowitych nieujemnych.

Chcąc dalej utwór Θ_0, po jego przerobieniu na sumę wyrazów kształtu (16), przedstawić jako funkcyję całkowitą wyrażeń elementarnych symetrycznych $\omega_0, \omega_1, \ldots$, znać musimy wszystkie rozwiązania równań diofantycznych (18) w liczbach całkowitych nieujemnych. Rozchodzi się więc o wyprowadzenie ogólnych wzorów obejmujących wszystkie te rozwiązania.

4.

Oznaczmy przez

$$(19)\qquad \begin{matrix} y_{01}, & y_{02}, & y_{03}, & \ldots & y_{0n} \\ & y_{12}, & y_{13}, & \ldots & y_{1n} \\ & & y_{23}, & \ldots & y_{2n} \\ & & & \cdots & \\ & & & & y_{n-1\,n} \end{matrix}$$

dowolne zmienne mniejsze od jedności, przez Y zaś ogólnie iloczyn jakichbądź potęg tychże zmiennych, tak iż:

$$Y = y_{01}^a\, y_{02}^b \ldots y_{12}^e\, y_{13}^g \ldots y_{n-1n}^h,$$

gdzie

$$a, b, \ldots g, h,$$

są jakiemibądź liczbami całkowitemi nieujemnemi. Niechaj dalej

$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

oznaczają rzetelne zmienne, t zmienną mniejszą od jedności, oraz połóżmy dla symetryi $u_0 = 0$. Utwórzmy iloczyn Π wszystkich czynników kształtu

$$(20)\qquad 1 - y_{\alpha\beta}\, e^{i(u_\alpha + u_\beta)}$$

w których α, β przebiegają wszystkie kombinacyje

$$\begin{matrix} 01, & 02, & 03, & \ldots & 0n \\ & 12, & 13, & \ldots & 1n \\ & & 23, & \ldots & 2n \\ & & & \cdots & \\ & & & & n-1\;n \end{matrix}$$

i rozwińmy funkcyję

$$V = \frac{1}{(1-te^{-i(u_1+u_2+\dots+u_n)})\,\Pi}$$

według potęg ilości

$$e^{iu_1},\ e^{iu_2},\ \dots\ e^{iu_n}. \tag{21}$$

Jeżeli część tego rozwinięcia, która stanowi spółczynnik zero-tych potęg ilości (21), oznaczymy przez T, t. j. jeżeli położymy

$$T = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi} V\,du_1\,du_2\dots du_n,$$

to spółczynnik potęgi t^m w rozwinięciu wyrażenia T według rosnących potęg zmiennej t ma kształt

$$Z_m = Y + Y' + \dots, \tag{22}$$

gdzie układy wykładników, z jakiemi zmienne (19) występują w wyrażeniach Y, $Y'\dots$, tworzą dokładnie wszystkie możliwe różne rozwiązania równań (18) w liczbach całkowitych nieujemnych.

Rozwinąwszy bowiem każdy czynnik ułamka $\frac{1}{\Pi}$ na szereg geometryczny i rozmnożywszy wszystkie te szeregi przez siebie, otrzymamy szereg kształtu

$$\frac{1}{\Pi} = \Sigma\, Ye^{i(\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 + \dots + \sigma_n u_n)}$$

gdzie

$$Y = y_{01}^{\lambda_{01}}\, y_{02}^{\lambda_{0n}} \dots y_{0n}^{\lambda_{0n}}\, y_{12}^{\lambda_{12}} \dots y_{n-1n}^{\lambda_{n-1n}},$$

$$\sigma_1 = \lambda_{01} + * + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \dots + \lambda_{1n}$$

$$\sigma_2 = \lambda_{02} + \lambda_{12} + * + \lambda_{23} + \dots + \lambda_{2n}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\sigma_n = \lambda_{0n} + \lambda_{1n} + \lambda_{2n} + \dots \qquad + *$$

i gdzie znak sumowania odnosi się do wszystkich możliwych wartości całkowitych nieujemnych wykładników

$$\lambda_{01},\ \lambda_{02},\ \dots\ \lambda_{0n},\ \lambda_{12},\ \dots\ \lambda_{n-1n}. \tag{23}$$

Rozmnożywszy następnie ten szereg przez szereg geometryczny

$$\frac{1}{1-te^{-i(u_1+u_2+\dots+u_n)}} = 1 + te^{-i(u_1+u_2+\dots+u_n)} + t^2e^{-2i(u_1+u_2+\dots+u_n)} + \dots,$$

widzimy, że tylko te wyrazy do T należeć mogą, w których liczby

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots\ \sigma_n$$

są sobie równe. Jeżeli zaś liczby te posiadają tę samą wartość m, to wykładniki (23) stanowią rozwiązanie zrównań (18) w liczbach całkowitych nieujemnych. Spółczynnik potęgi t^m w T posiada więc kształt (22) i wnioskujemy że:

$$T = \Sigma\, Z_m\, t^m.$$

Aby więc wszystkie możliwe rozwiązania równań (18) otrzymać, wystarcza wyprowadzić inną drogą wyrażenie T.

5.

Łatwo okazać, że wyrażenie T jest funkcyją wymierną zmiennych (19) i zmiennej t.

W tym celu niechaj

$$F(x) = c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \ldots$$

$$f(x) = (1 - a_1\, x^\alpha)\,(1 - a_2\, x^\beta) \ldots$$

$$g(x) = (1 - b_1\, x^\lambda)\,(1 - b_2\, x^\mu) \ldots$$

oznaczają dane funkcyje całkowite ilości x, w których spółczynniki

$$a_1,\, a_2,\, \ldots\, b_1,\, b_2,\, \ldots$$

są ilościami kształtu

$$t^\rho .\, Y e^{i(k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots)}$$

a spółczynniki

$$c_0,\, c_1,\, c_2,\, \ldots$$

ilościami kształtu

$$(24) \qquad l t^\rho .\, Y e^{i(k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots)} + l' t^{\rho'} .\, Y' e^{i(k'_1 u_1 + k'_2 u_2 + \ldots)} + \ldots,$$

gdzie przez $\rho, \rho', \ldots$ rozumiem wykładniki całkowite nieujemne, przez $k_1, k_2, \ldots\, k'_1, k'_2, \ldots$ wykładniki całkowite jakiebądź a przez $l, l', \ldots$ czynniki liczebne. Rozwińmy ułamek

$$U = \frac{e^{-kiu}\, F(e^{iu})}{f(e^{iu})\, g(e^{-iu})}$$

według potęg ilości e^{iu} i postawmy sobie za zadanie, wyznaczyć spółczynnik C zero-tej potęgi ilości e^{iu} w tem rozwinięciu.

Połóżmy:

$$\lambda + \mu + \ldots = \sigma$$

$$G(x) = (x^\lambda - b_1)\,(x^\mu - b_2) \ldots$$

Wyniknik R funkcyj f i G jest iloczynem złożonym z samych czynników kształtu

$$1-a_1^r b_1^s,\ 1-a_1^r b_2^s,\ 1-a_2^r b_1^s,\ \ldots$$

czyli kształtu

$$1-t^\rho . Ye^{i(k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots)}$$

przeto nie może zniknąć. Można więc wyznaczyć dwie funkcyje całkowite $P(x)$ i $Q(x)$ zmiennej x, które czynią zadosyć tożsamości

$$P.f + QG = R \tag{25}$$

Rozmnóżmy identyczność tę przez funkcyję F, sprowadźmy za pomocą dzielnika G iloczyn PF do kształtu

$$PF = LG + \varphi,$$

gdzie φ jest niższego rzędu jak G, i połóżmy

$$QF + Lf = \psi.$$

Tożsamość (25) natenczas przechodzi na

$$R\,F(x) = \varphi(x) f(x) + \psi(x)\,G(x) \tag{26}$$

i funkcyje φ, ψ będą co do budowy podobne do F; spółczynniki bowiem funkcyj P, Q złożone są całkowicie ze spółczynników funkcyj f, G a spółczynniki funkcyj φ, ψ całkowicie ze spółczynników wszystkich trzech funkcyj f, g, F, ponieważ najwyższa potęga zmiennej x w G ma spółczynnik równy jedności.

Podzieliwszy identyczność (26) przez $x^{k-\sigma} f G$ i położywszy następnie $x = e^{iu}$, otrzymamy

$$RU = \frac{e^{-kiu}\varphi(e^{iu})}{g(e^{-iu})} + \frac{e^{(\sigma-k)iu}\,\psi(e^{iu})}{f(e^{iu})}.$$

Ponieważ funkcyje

$$e^{-kiu}\,\varphi(e^{iu}),\quad e^{(\sigma-k)iu}\,\psi(e^{iu})$$

zawierają tylko skończoną ilość potęg funkcyj e^{iu}, przeto spółczynniki zero-tej potęgi tychże funkcyj w rozwinięciu wyrażeń

$$\frac{e^{-kiu}\,\varphi(e^{iu})}{g(e^{-iu})},\quad \frac{e^{(\sigma-k)iu}\,\psi(e^{iu})}{f(e^{iu})}$$

składać się będą ze skończonej liczby wyrazów, których suma stanowi wyrażenie N kształtu (24). Mamy tedy

$$C = \frac{N}{R}. \tag{27}$$

Jeżeli teraz pomyślimy sobie ułamek V najprzód rozwinięty według potęg ilości e^{iu_n}, to spółczynnik C_1 zero-tej potęgi tejże ilości tworzy ułamek kształtu (27), w którym wyrazy sumy N są kształtu

$$l\,t^\rho . Ye^{i(k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_{n-1} u_{n-1})}$$

R zaś składa się z czynników kształtu

$$1-t^{\rho}.\ Y e^{i(k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_{n-1} u_{n-1})}$$

Rozwinąwszy potem C_1 według potęg ilości $e^{iu_{n-1}}$, otrzymamy na spółczynnik C_2 zero-tej potęgi tejże ilości znowu ułamek kształtu (27), w którym wyrazy sumy N mają kształt

$$l\, t^{\rho}.\ Y e^{i(k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_{n-2} u_{n-2})}$$

R zaś składa się z czynników kształtu

$$1-t^{\rho}.\ Y e^{i(k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_{n-2} u_{n-2})}$$

Wnioskując tak dalej otrzymamy

$$T=\frac{N}{R},$$

gdzie R i N mają kształt

$$R=(1-t^{\rho}.\ Y')\,(1-t^{\rho'}.\ Y'')\dots$$
$$N=At^{\alpha}+Bt^{\beta}+\dots$$

$A, B, \dots$ zaś oznaczają wyrażenia całkowite

$$A=\Sigma\, cY, \quad B=\Sigma\, c'Y, \dots$$

o spółczynnikach liczebnych $c, c', \dots$

6.

Sprowadźmy wyrażenia Y występujące w liczniku i mianowniku funkcyj T do jak najmniejszej liczby

(28) $$Y_1, Y_2, \dots Y_h$$

tak, iż każde z rzeczonych wyrażeń daje się przedstawić przez iloczyn potęg

(29) $$Y_1^a\, Y_2^b \dots Y_h^e$$

o wykładnikach całkowitych nieujemnych, z wyrażeń zaś (28) żadne nie dozwala takiego przedstawienia przez pozostałe. Natenczas spółczynnik jakiejbądź potęgi t^m w rozwinięciu ułamka T będzie się składał z wyrazów kształtu

$$lY_1^a.\, Y_2^b \dots Y_h^e.$$

Nazwawszy więc układy wykładników, z któremi zmienne (19) występują w wyrażeniach (28) względnie przez

$$\alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots \alpha_{0n}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots \alpha_{n-1\,n}$$
$$\beta_{01}, \beta_{02}, \dots \beta_{0n}, \beta_{12}, \beta_{13}, \dots \beta_{n-1\,n}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \dots \varepsilon_{0n}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \dots \varepsilon_{n-1\,n},$$

widzimy, że wszystkie rozwiązania równań (18) w liczbach całkowitych nieujemnych zawarte muszą być we wzorach:

$$\lambda_{01} = a\alpha_{01} + b\beta_{01} + \ldots + e\varepsilon_{01}$$
$$\lambda_{02} = a\alpha_{02} + b\beta_{02} + \ldots + e\varepsilon_{02}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_{0n} = a\alpha_{0n} + b\beta_{0n} + \ldots + e\varepsilon_{0n}$$
$$\lambda_{12} = a\alpha_{12} + b\beta_{12} + \ldots + e\varepsilon_{12}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_{n-1\,n} = a\alpha_{n-1\,n} + b\beta_{n-1\,n} + \ldots + e\varepsilon_{n-1\,n}.$$

Jeżeli zatem położymy

$$(pq)^{\alpha_{12}} (pr)^{\alpha_{13}} \ldots p^{\alpha_{01}} q^{\alpha_{02}} \ldots s^{\alpha_{0n}} = A$$
$$(pq)^{\beta_{12}} (pr)^{\beta_{13}} \ldots p^{\beta_{01}} q^{\beta_{02}} \ldots s^{\beta_{0n}} = B$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(pq)^{\varepsilon_{12}} (pr)^{\varepsilon_{13}} \ldots p^{\varepsilon_{01}} q^{\varepsilon_{02}} \ldots s^{\varepsilon_{0n}} = E,$$

to wyrazowi (16) nadać możemy kształt

$$HA^a B^b \ldots E^e,$$

wskutek czego utwór Θ_0 przechodzi na funkcyją całkowitą wyrażeń

$$A, B, \ldots E.$$

Możemy więc napisać

$$\Theta_0 = F(A, B, \ldots E), \tag{30}$$

gdzie F oznacza funkcyją całkowitą.

7.

Oznaczmy wartości, które przyjmują wyrażenia

$$A, B, \ldots E$$

przez wszystkie możliwe przemiany par zmiennych

$$(p_1, p_2), (q_1, q_2), \ldots (s_1, s_2) \tag{31}$$

względnie przez

$$A, B, \ldots E$$
$$A', B', \ldots E' \tag{32}$$
$$A'', B'', \ldots E''$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

natenczas, jeżeli w tożsamości (30) uskutecznimy kolejno wszystkie rzeczone przemiany i uwzględnimy, że Θ_0 jest wyrażeniem symetrycznem, otrzymamy identyczności następujące

$$\Theta_0 = F(A, B, \ldots E)$$
$$\Theta_0 = F(A', B', \ldots E')$$
$$\Theta_0 = F(A'', B'' \ldots E'')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Z dodania tychże wynika

(33) $$n!\,\Theta_0 = S,$$

gdzie dla skrócenia położono:

$$S = F(A, B, \ldots E) + F(A', B', \ldots E') + F(A'', B'', \ldots E'') + \ldots.$$

Jeżeli wyrażenia $A, B, \ldots E, A', B', \ldots$ przejściowo pomyślimy sobie jako zmienne nieoznaczone, to S jest funkcyją całkowitą i symetryczną $n!$ grup zmiennych

$$\begin{array}{l} (A, B, \ldots E) \\ (A', B', \ldots E') \\ (A'', B'', \ldots E'') \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

i jako taka dozwala na identyczne przerobienie[1]) na funkcyję całkowitą spółczynników występujących w rozwinięciu iloczynu

$$(y + Au + Bv + \ldots + Ew)(y + A'u + B'v + \ldots + E'w)\ldots$$

według zmiennych $y, u, v, \ldots w$.

Rozumiejąc zatem znowu przez $A, B, \ldots$ wyrażenia (32), widzimy z identyczności (33), że Θ_0 daje się przedstawić jako funkcyja całkowita spółczynników iloczynu

$$\Omega = (y + Au + Bv + \ldots + Ew)(y + A'u + B'v + \ldots + E'w)\ldots,$$

które występują przy różnych iloczynach potęgowych $y^\alpha\, u^\beta \ldots w^\varepsilon$. Spółczynniki te są wyrażeniami całkowitemi symetrycznemi par (31) i jednorodnemi co do spółczynników każdej z form $p, q, \ldots s$, przeto mogą być przerobionemi na funkcyje całkowite jednorodne wyrażeń elementarnych symetrycznych (14). Jeżeli nadto spółczynniki te dają się całkowicie wyrazić przez kilka z nich, a mianowicie przez

(34) $$L_0, M_0, N_0, \ldots$$

to położyć można

(35) $$\Theta_0 = \Phi(L_0, M_0, N_0, \ldots)$$

gdzie Φ oznacza funkcyją całkowitą.

Zastąpiwszy teraz wa funkcyjach (34) wyrażenia

$$\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_n$$

przez spółczynniki

$$a_0, a_1, \ldots a_n$$

---

[1]) Zob. *Mertens*. O funkcyjach całkowitych symetrycznych. Rozprawy Akademii Umiejętności. Serya II. Tom I, str. 349.

formy f, otrzymamy poczet skończony utworów niezmiennikowych tejże formy

$$L, M, N, \ldots$$

które stanowią układ zupełny, albowiem z tożsamości (35) wynika

$$\Theta = \Phi (L, M, N, \ldots).$$

8.

Zastosujmy sposób wyłożony w ustępach poprzedzających do form drugiego, trzeciego i czwartego rzędu.

Niechaj będzie dana forma drugiego rzędu

$$f = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

i szukajmy najprzód ogólnego kształtu utworów niezmiennikowych całkowitych Θ_0 formy szczegółowej

$$pq = (p_1 x_2 + p_2 x_2)(q_1 x_1 + q_2 x_2).$$

Kształt ten według (16) jest następujący:

$$\Theta_0 = \Sigma H (pq)^\alpha p^\beta q^\gamma.$$

Równania (18) brzmią tutaj:

$$\alpha + \beta = m$$
$$\alpha + \gamma = m$$

i dają

$$\beta = \gamma;$$

najogólniejsze zatem ich rozwiązanie w liczbach całkowitych nieujemnych zawarte jest we wzorach

$$\alpha = \lambda$$
$$\beta = \mu$$
$$\gamma = \mu,$$

gdzie λ, μ oznaczają jakiebądź liczby całkowite nieujemne. Jest więc

$$\Theta_0 = \Sigma H (pq)^\lambda (p \cdot q)^\mu$$

i wyrażenia A, B, ... składają się tu z następujących dwóch

$$(pq) \text{ i } p \cdot q.$$

Z tego dalej wynika

$$\Omega = (y + upq + v(pq))(y + upq - v(pq))$$
$$= (y + upq)^2 - v^2 (pq)^2 = y^2 + 2pquy + u^2p^2q^2 - v^2(pq)^2$$

a wyrażenia L_0, M_0, ... są następujące:

$$pq, (pq)^2.$$

Te wyrażenia należy jeszcze przerobić na funkcyje całkowite spółczynników iloczynu

$$pq = p_1 q_1\, x_1^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1)\, x_1 x_2 + p_2 q_2 x_2^2. \tag{36}$$

Mamy identycznie

$$(pq)^2 = (p_1 q_2 + p_2 q_1)^2 - 4 p_1 q_1\, p_2 q_2 = \omega_1^2 - 4\omega_0 \omega_2,$$

dla wyrażenia zaś pq, już równanie (36) zawiera potrzebne przerobienie. Zastąpiwszy tedy spółczynniki iloczynu pq przez spółczynniki formy f, otrzymujemy wyrażenia

$$4\,(a_1^2 - a_0 a_2),\; f$$

i możemy układ zupełny złożyć z utworów

$$a_0 a_2 - a_1^2,\; f.$$

Każdy więc utór całkowity niezmiennikowy formy kwadratowej f ma kształt

$$C\,(a_0 a_2 - a_1^2)^{\mu} f^{\nu},$$

gdzie μ, ν oznaczają liczby całkowite nieujemne a C spółczynnik niezawisły od a_0, a_1, a_2, x_1, x_2.

9.

Niech będzie dana forma trzeciego rzędu

$$f = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3.$$

Każdy utwór niezmiennikowy całkowity formy szczegółowej

$$pqr = (p_1 x_1 + p_2 x_2)(q_1 x_1 + q_2 x_2)(r_1 x_1 + r_2 x_2)$$

ma kształt

$$\Theta_0 = \Sigma H\,(qr)^{\alpha}\,(rp)^{\beta}\,(pq)^{\gamma}\, p^{\alpha'} q^{\beta'} r^{\gamma'} \tag{37}$$

i równania (18) brzmią tutaj:

$$\begin{aligned} \beta + \gamma + \alpha' &= m \\ \gamma + \alpha + \beta' &= m \\ \alpha + \beta + \gamma' &= m. \end{aligned} \tag{38}$$

Aby je wyczerpująco rozwiązać w liczbach całkowitych nieujemnych, oznaczmy najmniejszą z liczb α, β, γ przez δ, najmniejszą z liczb α', β', γ' przez ε i połóżmy

$$\begin{aligned} \alpha - \delta &= \lambda & \beta - \delta &= \mu & \gamma - \delta &= \nu \\ \alpha' - \varepsilon &= \lambda' & \beta' - \varepsilon &= \mu' & \gamma' - \varepsilon &= \nu'. \end{aligned} \tag{39}$$

Liczby:

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \lambda',\ \mu',\ \nu'$$

są całkowitemi nieujemnemi i na mocy równań (38) będzie:

$$\lambda - \lambda' = \mu - \mu' = \nu - \nu' = \alpha + \beta + \gamma - \delta + \varepsilon - m.$$

Spólna wartość różnic $\lambda - \lambda'$, $\mu - \mu'$, $\nu - \nu'$ może być tylko równa zeru; występuje ona bowiem w kształcie i liczby dodatnej i liczby ujemnej, ponieważ tak między liczbami λ', μ', ν', jakoteż między liczbami λ, μ, ν przynajmniej jedna znajduje się równa zeru. Jeżeli zaś

$$\lambda = \lambda' \quad \mu = \mu' \quad \nu = \nu',$$

to równania (39) dają:

$$\alpha = \lambda + \delta \quad \beta = \mu + \delta \quad \gamma = \nu + \delta$$

$$\alpha' = \lambda + \varepsilon \quad \beta' = \mu + \varepsilon \quad \gamma' = \nu + \varepsilon$$

$$m = \lambda + \mu + \nu + 2\delta + \varepsilon.$$

Odwrotnie: wszystkie liczby, które z tych wzorów otrzymujemy udzielając ilościom λ, μ, ν, δ, ε wszystkie możliwe wartości całkowite nieujemne, czynią zadość równaniom (38) i ujemnemi być nie mogą.

Połóżmy:

$$(qr)p = A, \quad (rp)q = B, \quad (pq)r = C$$
$$(qr)(rp)(pq) = D$$
$$pqr = E.$$

Wyrażenie (37) przybiera natenczas kształt

$$\Theta_0 = \Sigma H A^\lambda B^\mu C^\nu D^\delta E^\varepsilon.$$

Na mocy identyczności

$$A + B + C = 0 \tag{40}$$

można jeszcze wyrugować A i prościej położyć

$$\Theta_0 = F(B, C, D, E),$$

gdzie F oznacza wyrażenie całkowite.

Rozchodzi się teraz głównie o utworzenie iloczynu Ω, który tu ma kształt

$$\Omega = \Pi\,(y + Ds + Et + Bu + Cv),.$$

gdzie znak iloczynu Π odnosi się do sześciu czynników, które powstają z wielomianu

$$y + Ds + Et + Bu + Cv$$

przez wszystkie możliwe przemiany par

$$(p_1, p_2), \quad (q_1, q_2), \quad (r_1, r_2). \tag{41}$$

Połóżmy dla skrócenia

$$y + Ds + Et = z$$

i oznaczmy krótko przez $\binom{\alpha\ \beta\ \gamma}{1\ 2\ 3}$ podstawienie, na mocy którego w poczecie (41) para pierwsza, druga, trzecia, ma być zastąpiona względnie przez parę αtą, βtą, γtą. Utworzmy najprzód te czynniki iloczynu Ω, które odpowiadają podstawieniom

$$\binom{1\ 2\ 3}{1\ 2\ 3},\ \binom{2\ 3\ 1}{1\ 2\ 3},\ \binom{3\ 1\ 2}{1\ 2\ 3}.$$

Ponieważ dla tych podstawień wyrażenie z nie zmienia się, czynniki rzeczone brzmią:

(42) $$z + Bu + Cv,\ z + Cu + Av,\ z + Au + Bv.$$

Pozostałe trzy czynniki iloczynu Ω otrzymamy, wykonywając w każdym z czynników (42) jedno z podstawień

$$\binom{1\ 3\ 2}{1\ 2\ 3},\ \binom{3\ 2\ 1}{1\ 2\ 3},\ \binom{2\ 1\ 3}{1\ 2\ 3}$$

n. p. pierwsze. Iloczyn ich więc otrzymamy z iloczynu czynników (42) przez to samo podstawienie $\binom{1\ 3\ 2}{1\ 2\ 3}$.

Iloczyn czynników (42) równa się

(43) $$z^3 + (A + B + C)(u+v)z^2$$
$$+ [(BC + CA + AB)(u^2+v^2+uv) + (A^2+ B^2+ C^2)uv]\, z$$
$$+ ABC(u^3+v^3) + (BC^2+ CA^2+AB^2)uv^2 + (B^2C+ C^2A+ A^2B)u^2v$$

i w następujący sposób może być uproszczonym. Położywszy dla skrócenia

$$A^2 + B^2 + C^2 = \varphi$$
$$BC^2+CA^2+AB^2-B^2C - C^2A-A^2B= (B-C)(C-A)(A-B) = \psi$$
$$BC^2+ CA^2 + AB^2 + B^2C + C^2A + A^2B = \chi,$$

na mocy tożsamości

$$ABC = DE$$

i identyczności (40) otrzymujemy

$$2(BC + CA + AB) = - A^2 - B^2 - C^2 = - \varphi$$
$$\chi = - 3ABC = - 3DE$$
$$BC^2 + CA^2 + AB^2 = \tfrac{1}{2}(\chi + \psi) = - \tfrac{3}{2} DE + \tfrac{1}{2}\psi$$
$$B^2C + C^2A + A^2B = \tfrac{1}{2}(\chi - \psi) = - \tfrac{3}{2} DE - \tfrac{1}{2}\psi.$$

W skutek tych równań wyrażenie (43) przechodzi na

$$z^3 + \tfrac{1}{2}\,\varphi\,(uv - u^2 - v^2)\,z + DE\,(u^3 + v^3 - \tfrac{3}{2}\,uv^2 - \tfrac{3}{2}\,u^2v) + \tfrac{1}{2}\,\psi\,(uv^2 - u^2v)$$

i po rozwinięciu potęg z^3 i z przybiera kształt

$$F(\varphi,\ \psi,\ E,\ D^2) + DG(\varphi,\ \psi,\ E,\ D^2), \tag{44}$$

gdzie F, G oznaczają funkcyje całkowite zmiennych

$$y,\ s,\ t,\ u,\ v$$

i wyrażeń

$$\varphi,\ \psi,\ E,\ D^2. \tag{45}$$

Jeżeli teraz jeszcze wykonamy podstawienie $\begin{pmatrix}1\,3\,2\\1\,2\,3\end{pmatrix}$, które nie zmienia wyrażeń (45), to funkcyja (44) przechodzi na

$$F(\varphi,\ \psi,\ E,\ D^2) - DG(\varphi,\ \psi,\ E,\ D^2).$$

Przeto mamy:

$$\begin{aligned}\Omega &= (F + DG)(F - DG)\\ &= F^2(\varphi,\ \psi,\ E,\ D^2) - D^2G^2(\varphi,\ \psi,\ E,\ D^2).\end{aligned}$$

Wyrażenia zatem L_0, $M_0 \ldots$ są tu wyrażeniami (45).

Należy jeszcze wyrażenia te przedstawić jako funkcyje całkowite spółczynników iloczynu

$$pqr = E = \omega_0\, x_1^3 + \omega_1\, x_1^2\, x_2 + \omega_2\, x_1\, x_2^2 + \omega_3\, x_2^3.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} &= A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB\\ &= 2\varphi\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial E}{\partial x_1} &= 2A^2\,(C - B) + 2B^2\,(A - C) + 2C^2\,(B - A)\\ &= 2\psi\end{aligned}$$

$$D^2 = \omega_1^2\,\omega_2^2 + 18\omega_0\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3 - 4\omega_1^3\,\omega_3 - 4\omega_0\,\omega_2^3 - 27\omega_0^2\,\omega_3^2.\ [1]$$

Układ zupełny dla formy trzeciego rzędu f złożyć więc można z utworów następujących: [2])

---

[1]) P. *Serret*, Cours d'algèbre supérieure.

[2]) P. *Clebsch*, Theorie der binären Formen.

Z niezmiennika:

$$\Delta = a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 + 4a_1^3 a_3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3$$

i ze spółzmienników:

$$f = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

$$H = \frac{1}{36}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right] = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + \\ + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2$$

$$Q = \frac{1}{3}\left[\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right] = (3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3 - a_0^2 a_3) x_1^3 + \\ + 3(2a_0 a_2^2 - a_0 a_1 a_3 - a_1^2 a_2) x_1^2 x_2 \\ + 3(a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 + \\ + (a_0 a_3^2 + 2a_2^3 - 3a_1 a_2 a_3) x_2^3 .$$

Znana identyczność

$$Q^2 = \Delta f^2 - 4H^3$$

pomiędzy temi utworami zachodząca, wynika z równania

$$(46)\quad (B-C)^2(C-A)^2(A-B)^2 = (A+B+C)^2(BC+CA+AB)^2 \\ + 18(A+B+C)(BC+CA+AB)ABC \\ - 4(BC+CA+AB)^3 - 4(A+B+C)^3 ABC \\ - 27A^2B^2C^2$$

czyli

$$\psi^2 = \tfrac{1}{2}\varphi^3 - 27D^2E^2.$$

10.

Niech będzie dana forma czwartego rzędu

$$f = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4.$$

Utwór jakibądź całkowity niezmiennikowy Θ_0 formy szczegółowej

$$pqrs = (p_1 x_1 + p_2 x_2)(q_1 x_1 + q_2 x_2)(r_1 x_1 + r_2 x_2)(s_1 x_1 + s_2 x_2)$$

składa się wyłącznie z wyrazów kształtu

$$(47)\quad H(pq)^{\alpha_{12}}(pr)^{\alpha_{13}}(ps)^{\alpha_{14}}(qr)^{\alpha_{23}}(qs)^{\alpha_{24}}(rs)^{\alpha_{34}} p^{\beta_1} q^{\beta_2} r^{\beta_3} s^{\beta_4}$$

i równania (18) brzmią tutaj:

$$(48)\quad \begin{aligned} \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} + \beta_1 &= m \\ \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{24} + \beta_2 &= m \\ \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{34} + \beta_3 &= m \\ \alpha_{14} + \alpha_{24} + \alpha_{34} + \beta_4 &= m. \end{aligned}$$

Najprostsze rozwiązania w liczbach całkowitych nieujemnych tych równań są następujące czternaście, w których liczby równe zeru opuszczone zostały, a które krótko nazwę rozwiązaniami r_0 :

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = m = 1$$
$$\alpha_{23} = \alpha_{14} = m = 1$$
$$\alpha_{13} = \alpha_{24} = m = 1$$
$$\alpha_{12} = \alpha_{34} = m = 1$$
$$\alpha_{23} = \beta_1 = \beta_4 = m = 1$$
$$\alpha_{13} = \beta_2 = \beta_4 = m = 1$$
$$\alpha_{12} = \beta_3 = \beta_4 = m = 1$$
$$\alpha_{14} = \beta_2 = \beta_3 = m = 1$$
$$\alpha_{24} = \beta_1 = \beta_3 = m = 1$$
$$\alpha_{34} = \beta_1 = \beta_2 = m = 1$$
$$\alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = 1 \qquad \beta_1 = m = 2$$
$$\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{34} = 1 \qquad \beta_2 = m = 2$$
$$\alpha_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{24} = 1 \qquad \beta_3 = m = 2$$
$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 1 \qquad \beta_4 = m = 2.$$

Jeżeli przez sumę dwóch rozwiązań R, R' równań (48) rozumimy rozwiązanie, którego pojedyncze liczby powstają z dodania liczb odpowiednich rozwiązania R i R', to okazać można, że najogólniejsze rozwiązanie równań (48) w liczbach całkowitych nieujemnych jest sumą samych rozwiązań r_0. W tym celu dowiodę, że każde takie dane rozwiązanie

$$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots \alpha_{34}, \beta_1, \ldots \beta_4, m,$$

które się nie składa z samych zer, rozłożyć można na jedno z rozwiązań r_0 i na inne R składajace się z liczb całkowitych nieujemnych.

Należy rozróżnić dwa przypadki według tego, czy liczby

$$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$$

są wszystkie równe zeru, czy nie.

W pierwszym przypadku równania (48) brzmią

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = m$$

i rozwiązanie dane rozłożyć można na rozwiązanie

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1$$

i na inne nie zawierające liczb ujemnych.

W drugim przypadku niechaj będzie

$$\alpha_{\mu\nu} > 0$$

i oznaczmy w szeregu *1, 2, 3, 4* liczby różne od μ, ν przez λ, ρ.

Jeżeli $\alpha_{\lambda\rho} > 0$, to rozwiązanie dane rozpada się na rozwiązanie

$$\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\lambda\rho} = m = 1$$

i na inne niezawierające liczb ujemnych.

Jeżeli $\beta_\lambda > 0$ i $\beta_\rho > 0$, to rozwiązanie dane rozpada się na rozwiązanie

$$\alpha_{\mu\nu} = \beta_\lambda = \beta_\rho = m = 1$$

i na inne niezawierające liczb ujemnych.

Jeżeli zaś $\alpha_{\lambda\rho}$ i jedna z liczb β_λ, β_ρ mają wartość zero, to bez naruszenia ogólności założyć można $\beta_\lambda = 0$. Równania (48) natenczas brzmią

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\lambda} + \alpha_{\mu\rho} + \beta_\mu &= m \\ \alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\nu\lambda} + \alpha_{\nu\rho} + \beta_\nu &= m \\ \alpha_{\lambda\mu} + \alpha_{\lambda\nu} \qquad &= m \\ \alpha_{\rho\mu} + \alpha_{\rho\nu} + \beta_\rho &= m, \end{aligned}$$

jeżeli ogólnie położymy $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$; i dają:

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda\mu} &= \alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\nu\rho} + \beta_\nu \geqq \alpha_{\mu\nu} \\ \alpha_{\lambda\nu} &= \alpha_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\rho} + \beta_\mu \geqq \alpha_{\mu\nu} \\ \beta_\rho &= 2\alpha_{\mu\nu} + \beta_\mu + \beta_\nu \geqq 2\alpha_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie więc dane rozpada się na rozwiązanie

$$\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\lambda\mu} = \alpha_{\lambda\nu} = 1 \quad \beta_\rho = m = 2$$

i na inne złożone z liczb nieujemnych.

Jeżeli rozwiązanie R nie składa się ze samych zer, to rozpada się znowu na jedno z rozwiązań r_0 i na inne, nie zawierające liczb ujemnych, i t. d.

Najogólniejsze więc rozwiązanie (48) w liczbach całkowitych nieujemnych zawarte jest we wzorach:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_{23} = \alpha + \alpha' + \lambda + \rho & \alpha_{34} = \gamma + \gamma'' + \lambda + \mu \\
\alpha_{31} = \beta + \beta' + \mu + \rho & \beta_1 = \sigma + \alpha' + \beta'' + \gamma'' + 2\lambda \\
\alpha_{12} = \gamma + \gamma' + \nu + \rho & \beta_2 = \sigma + \alpha'' + \beta' + \gamma'' + 2\mu \\
\alpha_{14} = \alpha + \alpha'' + \mu + \nu & \beta_3 = \sigma + \alpha'' + \beta'' + \gamma' + 2\nu \\
\alpha_{24} = \beta + \beta'' + \nu + \lambda & \beta_4 = \sigma + \alpha' + \beta' + \gamma' + 2\rho
\end{array}$$

$$m = \alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' + \alpha'' + \beta'' + \gamma'' + 2\lambda + 2\mu + 2\nu + 2\rho + \sigma,$$

gdzie σ oznacza liczbę rozwiązań

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = m = 1\ ,$$

α liczbę rozwiązań

$$\alpha_{23} = \alpha_{14} = m = 1$$

i t. d., jakie przy rozkładaniu danego rozwiązania znajdujemy.

Położywszy tedy

$$\begin{array}{lll}
pqrs = E & & \\
(qr)(ps) = A & & \\
(rp)(qs) = B & & \\
(pq)(rs) = C & & \\
(ps)\,qr = L & (qr)\,ps = L' & \\
(qs)\,rp = M & (rp)\,qs = M' & \qquad (49) \\
(rs)\,pq = N & (pq)\,rs = N' & \\
(qr)(rs)(sq)\,p^2 = P & & \\
(rp)(ps)(sr)\,q^2 = Q & & \\
(pq)(qs)(sp)\,r^2 = R & & \\
(qr)(rp)(pq)\,s^2 = S, & &
\end{array}$$

widzimy, że wyraz (47) występuje w kształcie iloczynu potęg o wykładnikach całkowitych nieujemnych wyrażeń (49) i że utwór Θ_0 będzie funkcyją całkowitą tychże wyrażeń.

Z tej funkcyi nadto wyrugować można wyrażenia:

$$P,\ Q,\ R,\ S,\ L',\ M',\ N'.$$

Na mocy identyczności

$$(qr)p + (rp)q + (pq)r = 0$$

mamy bowiem

$$P = (rs)(sq)p\cdot(qr)p = -(rs)(sq)p\,\big((rp)q + (pq)r\big)$$
$$= BN + CM$$

i podobne identyczności istnieją dla Q, R, S.

Dalej zachodzą tożsamości

$$(50)\qquad \begin{aligned} L' &= M - N \\ M' &= N - L \\ N' &= L - M. \end{aligned}$$

Można więc położyć

$$\Theta_0 = F(A, B, C, E, L, M, N),$$

$$\Omega = \Pi(y + A\xi' + B\eta' + C\zeta' + E\vartheta' + L\xi + M\eta + N\zeta),$$

gdzie F oznacza funkcyją całkowitą; ilości:

$$y, \xi', \eta', \ldots \xi, \eta, \zeta$$

dowolne zmienne, a znak mnożenia Π odnosi się do wszelkich możliwych przemian par

$$(51)\qquad (p_1, p_2), (q_1, q_2), (r_1, r_2), (s_1, s_2).$$

Jeżeli znowu przez $\binom{\lambda\,\mu\,\nu\,\rho}{1\,2\,3\,4}$ oznaczymy podstawienie, na mocy którego w szeregu (51) para *1*, *2*, *3*, *4* ma być względnie zastąpiona przez parę λ, μ, ν, ρ, i jeżeli każde podstawienie znanym sposobem na czynniki kołowe rozłożymy, to wszystkie 24 podstawienia, które dla czterech elementów *1*, *2*, *3*, *4* utworzyć można, podzielimy na sześć klas następujących:

$$K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5.$$

Do pierwszej klasy niechaj należą podstawienia grupy

$$(1)(2)(3)(4),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23).$$

Podstawienia drugiej i trzeciej klasy powstają z podstawień pierwszej klasy, jeżeli każde z nich pomnożymy przez podstawienie $(123)(4)$ a względnie $(132)(4)$. Podstawienia klas K_3, K_4, K_5 powstają względnie z podstawień zachodzących w K_0, K_1, K_2, mnożąc te ostatnie przez podstawienie $(1)(4)(23)$.

Utwórzmy najprzód iloczyn J czterech wypadków, które powstają z wielomianu

$$(52)\qquad y + A\xi' + B\eta' + C\zeta' + E\vartheta' + L\xi + M\eta + N\zeta$$

przez wykonanie podstawień pierwszej klasy. Ponieważ podstawienia te nie zmieniają wyrażeń A, B, C, E, przeto położywszy dla skrócenia

$$y + A\xi' + B\eta' + C\zeta' + E\vartheta' = z,$$

otrzymujemy wypadki następujące:

$$\left.\begin{array}{l} z + L\xi + M\eta + N\zeta \\ z - L\xi + M'\eta - N'\zeta \\ z - L'\xi - M\eta + N'\zeta \\ z + L'\xi - M'\eta - N\zeta, \end{array}\right\} \quad (53)$$

które jeszcze dalej uprościć możemy. Połóżmy dla skrócenia

$$\begin{array}{lll} L - L' = l & M - M' = m & N - N' = n \\ \xi + \zeta = 2u & \xi + \eta = 2v & \eta + \zeta = 2w. \end{array} \quad (54)$$

Tedy z identyczności (50) wynika

$$L + L' = m \qquad M + M' = n \qquad N + N' = l \quad (55)$$

a z równań (54) i (55)

$$\begin{array}{ll} L = \frac{1}{2}(l + m) & L' = \frac{1}{2}(m - l) \\ M = \frac{1}{2}(m + n) & M' = \frac{1}{2}(n - m) \\ N = \frac{1}{2}(n + l) & N' = \frac{1}{2}(l - n). \end{array}$$

Podstawiwszy te wartości we wyrażeniach (53), otrzymamy iloczyn w kształcie

$$\begin{aligned} J &= (z + lu + mv + nw)(z - lu - mv + nw) \times \\ &\quad (z + lu - mv - nw)(z - lu + mv - nw) \\ &= [(z + lu)^2 - (mv + nw)^2]\,[(z - lu)^2 - (mv - nw)^2] \\ &= (z^2 + l^2u^2 - m^2v^2 - n^2w^2)^2 - 4(luz - mnvw)^2 \\ &= (z^2 + l^2u^2 - m^2v^2 - n^2w^2)^2 - 4l^2u^2z^2 - 4m^2n^2v^3w^2 + 8lmnuvwz. \end{aligned}$$

Aby to wyrażenie sprowadzić do jak najprostszego kształtu, połóżmy

$$\left.\begin{array}{l} lmn = \psi \\ l^2 + m^2 + n^2 = \varphi. \end{array}\right\} \quad (56)$$

Rozwiązawszy identyczności

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= (M - M')^2 - (M + M')^2 = -4MM' = -4BE \\ n^2 - l^2 &= (N - N')^2 - (N + N')^2 = -4NN' = -4CE \\ l^2 - m^2 &= (L - L)^2 - (L + L')^2 = -4LL' = -4AE \end{aligned}$$

i równanie (56) względem l^2, m^2, n^2, otrzymamy

$$\left.\begin{array}{l} l^2 = \frac{1}{3}\varphi + \frac{4}{3}(C - A)E \\ m^2 = \frac{1}{3}\varphi + \frac{4}{3}(A - B)E \\ n^2 = \frac{1}{3}\varphi + \frac{4}{3}(B - C)E. \end{array}\right\} \quad (57)$$

Po podstawieniu tych wartości na l^2, m^2, n^2, lmn i rozwinięciu, iloczyn J przechodzi na funkcyję całkowitą zmiennych

$$y, \zeta', \eta', \ldots \zeta$$

i wyrażeń

$$E, \varphi, \psi, A, B, C,$$

z którejto funkcyi za pomocą identyczności

$$A + B + C = 0 \tag{58}$$

jeszcze A wyrugować można. Możemy przeto położyć, nie uwydatniając E, φ, ψ:

$$J = \Phi\,(B, C),$$

gdzie Φ oznacza funkcyję całkowitą.

Wykonajmy teraz w J podstawienia

$$(123)(4) \qquad (132)(4),$$

aby otrzymać iloczyny wypadków, odpowiadających wykonaniu podstawień klas K_1, K_2 we wielomianie (52). Ponieważ wyrażenia E, φ, ψ... przez podstawienia rzeczone nie doznają żadnej zmiany, przeto iloczyny w mowie będące równają się względnie wyrażeniom

$$\Phi\,(C, A) \qquad \Phi\,(A, B).$$

Oznaczywszy zatem iloczyn dwunastu wartości, które wielomian (52) przez przemiany pierwszych trzech klas przybiera, przez J', mamy

$$J' = \Phi\,(B, C)\,\Phi\,(C, A)\,\Phi\,(A, B).$$

Aby J' wyznaczyć, połóżmy jeszcze

$$J'' = \Phi\,(C, B)\,\Phi\,(A, C)\,\Phi\,(B, A)$$

i uważajmy w J', J'' wyrażenia A, B, C jako ilości nieoznaczone. Tedy suma $J' + J''$ jest funkcyją całkowitą symetryczną tychże ilości i daje się przerobić identycznie na funkcyją całkowitą wyrażeń elementarnych symetrycznych

$$A + B + C, \quad BC + CA + AB, \quad ABC. \tag{59}$$

Różnica zaś $J' - J''$ jest funkcyją alternującą i jako taka algiebraicznie podzielną być musi przez iloczyn alternujący

$$(B - C)\,(C - A)\,(A - B)$$

a iloraz jest funkcyją symetryczną czyli funkcyją całkowitą wyrażeń (59). Można zatem położyć tożsamościowo:

$$J' + J'' = \Psi(A+B+C,\ BC+CA+AB,\ ABC)$$

$$J' - J'' = (B-C)(C-A)(A-B)\Psi'(A+B+C,\ BC+CA+AB,\ ABC)$$

$$J' = \tfrac{1}{2}\Psi + \tfrac{1}{2}(B-C)(C-A)(A-B)\Psi',$$

gdzie Ψ, Ψ' oznaczają funkcyje całkowite.

Wróciwszy znowu do znaczenia wyrażeń A, B, C i położywszy

$$BC + CA + AB = D$$

$$(B-C)(C-A)(A-B) = D'$$

$$ABC = \Delta,$$

otrzymujemy

$$J' = \tfrac{1}{2}\Psi(0,\ D,\ \Delta) + \tfrac{1}{2}D'\Psi'(0,\ D,\ \Delta).$$

J' zatem jest funkcyją całkowitą wyrażeń

$$E,\ \varphi,\ \psi,\ D,\ D',\ \Delta \qquad (60)$$

i położyć można

$$J' = G + \Delta G_1,$$

gdzie G, G_1 oznaczają funkcyje całkowite wyrażeń

$$E,\ \varphi,\ \psi,\ D,\ D',\ \Delta^2. \qquad (61)$$

Chcąc dalej otrzymać iloczyn wartości wielomianu (52), które odpowiadają przemianom klas K_3, K_4, K_5, wystarcza w J' przemienić pary (q_1, q_2) i (r_1, r_2), przez co J' przechodzi na

$$G - \Delta G_1,$$

ponieważ przez rzeczoną przemianę wyrażenia (61) nie doznają żadnej zmiany, tylko Δ przechodzi na $-\Delta$.

Jest więc

$$\Omega = (G + \Delta G_1)(G - \Delta G_1) = G^2 - \Delta^2 G_1^2,$$

a ponieważ Δ^2 wyrazić można przez D, D' za pomocą identyczności (46), która tu na mocy zrównania (58) daje

$$\Delta^2 = -\frac{1}{27}D'^2 - \frac{4}{27}D^3,$$

przeto ostatecznie znajdujemy

$$\Omega = \chi(E,\ \varphi,\ \psi,\ D,\ D'),$$

gdzie χ oznacza funkcyję całkowitą zmiennych y, ζ', ... ζ i wyrażeń

$$E,\ \varphi,\ \psi,\ D,\ D'. \qquad (62)$$

Wyrażenia te zatem dają układ zupełny formy f, jeżeli je przerobimy na funkcyje całkowite spółczynników iloczynu

$$E = \omega_0 x_1^4 + \omega_1 x_1^3 x_2 + \omega_2 x_1^2 x_2^2 + \omega_3 x_1 x_2^3 + \omega_4 x_2^4$$

i spółczynniki te zastąpimy przez spółczynniki formy f.

Celem przerobienia wyrażeń D, D', kładę:

$$q_1 r_1 p_2 s_2 + p_1 s_1 q_2 r_2 = z_1$$
$$r_1 p_1 q_2 s_2 + q_1 s_1 r_2 p_2 = z_2$$
$$p_1 q_1 r_2 s_2 + r_1 s_1 p_2 q_2 = z_3,$$

tedy jest

$$A = z_3 - z_2 \qquad B = z_1 - z_3 \qquad C = z_2 - z_1$$
$$z_1 + z_2 + z_3 = \omega_2$$
$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \omega_1 \omega_3 - 4\omega_0 \omega_4$$
$$z_1 z_2 z_3 = \omega_0 \omega_3^2 - 4\omega_0 \omega_2 \omega_4 + \omega_1^2 \omega_4 .$$

Stąd wynika:

$$D = (z_1 - z_3)(z_2 - z_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_2) + (z_3 - z_2)(z_1 - z_3)$$
$$= z_3 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 3(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) - (z_1 + z_2 + z_3)^2$$
$$= 3\omega_1 \omega_3 - 12\omega_0 \omega_4 - \omega_2^2$$
$$D' = (2z_1 - z_2 - z_3)(2z_2 - z_1 - z_3)(2z_3 - z_1 - z_2)$$
$$= (3z_1 - \omega_2)(3z_2 - \omega_2)(3z_3 - \omega_2)$$
$$= -\omega_2^3 + 3(z_1 + z_2 + z_3)\omega_2^2 - 9(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)\omega_2 + 27 z_1 z_2 z_3$$
$$= 2\omega_2^3 - 9\omega_1 \omega_2 \omega_3 - 72\omega_0 \omega_2 \omega_4 + 27\omega_0 \omega_3^2 + 27\omega_1^2 \omega_4 .$$

Funkcyję φ przerobić można w następujący sposób.

Ponieważ

$$LL' + MM' + NN' = E(A + B + C) = 0,$$

przeto

$$\varphi = L^2 + L'^2 - 2LL' + M^2 + M'^2 - 2MM' + N^2 + N'^2 - 2NN'$$
$$= L^2 + M^2 + N^2 + L'^2 + M'^2 + N'^2.$$

Położywszy zaś dla skrócenia

$$p_1 qrs = \alpha_1 \quad q_1 prs = \beta_1 \quad r_1 pqs = \gamma_1 \quad s_1 pqr = \delta_1$$
$$p_2 qrs = \alpha_2 \quad q_2 prs = \beta_2 \quad r_2 pqs = \gamma_2 \quad s_2 pqr = \delta_2$$
$$(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1)\sqrt{-1} = \varepsilon_1$$
$$(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2)\sqrt{-1} = \varepsilon_2$$
$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = (\alpha\beta) \qquad \alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_1 = (\alpha\gamma) \ldots$$

otrzymujemy:

$$(\alpha\delta) = EL \qquad (\beta\gamma) = EL'$$

$$(\beta\delta) = EM \qquad (\gamma\alpha) = EM'$$

$$(\gamma\delta) = EN \qquad (\alpha\beta) = EN'$$

$$(\alpha\varepsilon) = \sqrt{-1}\,(L - M' + N')\,E = \sqrt{-1}\,(l + m - n)\,E$$

$$(\beta\varepsilon) = \sqrt{-1}\,(L' + M - N')\,E = \sqrt{-1}\,(-l + m + n)\,E$$

$$(\gamma\varepsilon) = \sqrt{-1}\,(-L' + M' + N)\,E = \sqrt{-1}\,(l - m + n)\,E$$

$$(\delta\varepsilon) = \sqrt{-1}\,(L + M + N)\,E = \sqrt{-1}\,(l + m + n)\,E$$

a stąd

$$(\alpha\delta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\beta\delta)^2 + (\gamma\alpha)^2 + (\gamma\delta)^2 + (\alpha\beta)^2 = E^2\varphi$$

$$\begin{aligned}(\alpha\varepsilon)^2 + (\beta\varepsilon)^2 + (\gamma\varepsilon)^2 + (\delta\varepsilon)^2 &= -E^2(l+m+n)^2 - E^2(-l+m+n)^2 \\ &\quad - E^2(l-m+n)^2 - E^2(l+m-n)^2 \\ &= -4E^2(l^2+m^2+n^2) = -4E^2\varphi.\end{aligned}$$

Jest więc:

$$\begin{aligned}-3E^2\varphi &= (\alpha\beta)^2 + (\alpha\gamma)^2 + (\alpha\delta)^2 + (\alpha\varepsilon)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\beta\delta)^2 + (\beta\varepsilon)^2 \\ &\quad + (\gamma\delta)^2 + (\gamma\varepsilon)^2 + (\delta\varepsilon)^2 \\ &= (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2 + \varepsilon_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_3^2 + \gamma_2^2 + \delta_2^2 + \varepsilon_2^2) \\ &\quad - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2)^2\end{aligned}$$

a ponieważ:

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^5 + \delta_1^2 + \varepsilon_1^2 &= -2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_1\delta_1 + \beta_1\gamma_1 + \beta_1\delta_1 + \gamma_1\delta_1) \\ &= -E\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 + \delta_2^2 + \varepsilon_2^2 &= -2(\alpha\,\beta_2 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_2\delta_2 + \beta_2\gamma_2 + \beta_2\delta_2 + \gamma_2\delta_2) \\ &= -E\frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 &= -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1 \\ &\quad - \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 - \beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 \\ &= -E\frac{\partial^2 E}{\partial x_1\,\partial x_2},\end{aligned}$$

przeto

$$\varphi = -\frac{1}{3}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 E}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right].$$

Dalej mamy:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2}\frac{\partial E}{\partial x_1} = 2nL$$

$$\frac{\partial L'}{\partial x_1}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{\partial L'}{\partial x_2}\frac{\partial E}{\partial x_1} = -2nL'$$

a stąd

$$\frac{\partial(L^2+L'^2)}{\partial x_1}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{\partial(L^2+L'^2)}{\partial x_2}\frac{\partial E}{\partial x_1} = 4n(L^2-L'^2) = 4lmn$$
$$= 4\psi.$$

Podobnym sposobem znajdziemy:

$$\frac{\partial(M^2+M'^2)}{\partial x_1}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{\partial(M^2+M'^2)}{\partial x_2}\frac{\partial E}{\partial x_1} = 4\psi,$$

$$\frac{\partial(N^2+N'^2)}{\partial x_1}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{\partial(N^2+N'^2)}{\partial x_2}\frac{\partial E}{\partial x_1} = 4\psi.$$

Stąd przez dodanie mamy:

$$\psi = \frac{1}{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial E}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial E}{\partial x_1}\right).$$

Układ tedy zupełny składa się z następujących utworów:

Z niezmienników

$$j = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$$

$$j' = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3$$

i ze spółzmienników

$$f = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_3^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

$$H = \frac{1}{144}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right)$$

$$= (a_0 a_2 - a_1^2)x_1^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)x_1^3 x_2 + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2)x_1^2 x_2^2$$
$$+ 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)x_1 x_2^3 + (a_2 a_4 - a_3^2)x_2^4$$

$$T = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial H}{\partial x_1}\right) =$$

$$= (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)x_1^6 + (a_0^2 a_4 + 2a_0 a_1 a_3 - 9a_0 a_2^2 + 6a_1^2 a_2)x_1^5 x_2$$
$$+ 5(a_0 a_1 a_4 - 3a_0 a_2 a_3 + 2a_1^2 a_3)x_1^4 x_2^2 + 10(a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2)x_1^3 x_2^3$$
$$+ 5(-a_0 a_3 a_4 + 3a_1 a_2 a_4 - 2a_1 a_3^2)x_1^2 x_2^4 + (-a_0 a_4^2 - 2a_1 a_3 a_4 + 9a_2^2 a_4 -$$
$$- 6a_2 a_3^2)x_1 x_2^5 + (-a_1 a_4^2 + 3a_2 a_3 a_4 - 2a_3^3)x_2^6.$$

Identyczne równanie, zachodzące pomiędzy temi utworami

$$T^2 = -4H^3 + j f^2 H - j' f^3$$

bezpośrednio wynika z tożsamości (57), które pomnożone przez siebie, dają:

$$27\psi^2 = 27 l^2 m^2 n^2 = (\varphi + 4E(C-A))(\varphi + 4E(A-B))(\varphi + 4E(B-C))$$
$$= \varphi^3 + 48DE^2\varphi + 64D'E^3.$$

